Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Liebmann, Heinrich** (1874 – 1939)

Titel: **Der geometrische Aufbau der Bäcklundschen Transformation**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1921, 5

Die vorliegende Arbeit dient dem Zweck, die meist in Verbindung mit anderen, weiter ausholenden Untersuchungen dargestellte Bäcklundsche Transformation der Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes elementar abzuleiten und dabei zugleich vollen Einblick in ihren geometrischen Aufbau zu gewinnen.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1921, S. XV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1921. 5. Abhandlung

Der geometrische Aufbau der Bäcklundschen Transformation

Von

HEINRICH LIEBMANN

Eingegangen am 2. Juli 1921

Vorgelegt von OSKAR PERRON

Heidelberg 1921
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1653

Die einfache geometrische Bedeutung des Gleichungssystems, durch das die Bäcklundsche Transformation[1] der Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes definiert wird, legt den Wunsch nahe, die durch die Transformation vermittelten Zusammenhänge auch ohne weitgehende Hilfsmittel der Flächentheorie zu erkennen.

Diesem Wunsch entstammt die folgende Darlegung, die sich zum Nachweis der Haupteigenschaft dabei der von F. Engel eingeführten Koordinaten für die Elemente zweiter Ordnung bedient. Nachdem diese erwiesen, also erkannt ist, welche Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes wieder in gleichartige Flächen übergehen, ergeben sich bei Einführung gewisser Vektoren die weiteren Eigenschaften leicht. Insbesondere kann die von Darboux[2] für den einfachsten Fall der Bäcklundschen Transformation $(\alpha=\pi/2)$ angegebene Figur auch für den allgemeinen Fall aufgebaut werden, ohne daß man die Theorie der dreifachen Orthogonalsysteme usw. heranzuziehen braucht.

I.

Die Bäcklundsche Transformation ist gegeben durch die Gleichungen

$$(B)\begin{cases} (1) & (x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2 = k^2, \\ (2) & z-z_1-p\,(x-x_1)-q\,(y-y_1) = 0, \\ (3) & z_1-z-p_1(x_1-x)-q_1(y_1-y) = 0, \\ (4) & p\,p_1+q\,q_1+1 = \cos\alpha\sqrt{1+p^2+q^2}\,\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,. \end{cases}$$

Jedem Flächenelement $E(x,y,z,p,q)$ wird also ein Kranz von Flächenelementen $E_1(x_1,y_1,z_1,p_1,q_1)$ zugeordnet, deren Träger, die Punkte $P_1(x_1,y_1,z_1)$ auf einem Kreis angeordnet sind. Dieser Kreis hat den Punkt $P(x,y,z)$ zum Mittelpunkt, sein Radius ist k, ferner liegt er in der Ebene des ersten Elements. Die vierte Glei-

[1] Vgl. Math. Enzyklopädie III D 6a (Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander) Nr. 29, und III D 7 (Berührungstransformationen) Nr. 16.

[2] Darboux, Théorie des surfaces III (Paris 1894), p. 430.

chung schreibt dann noch vor, daß die Ebene des zweiten Elements, die nach (2) und (3) ebenso wie die des ersten die Strecke PP_1 enthält, gegen diese Ebene die Neigung α besitzt.

Für die geometrische Untersuchung empfiehlt es sich, außer den Richtungskosinus der Strecke PP_1, die wir mit u, v, w bezeichnen wollen, und denen der Normalen der beiden Elemente (l, m, n, bzw. l_1, m_1, n_1), noch zwei andre Richtungen einzuführen, nämlich die in den Elementebenen gelegenen und zugleich zu PP_1 senkrechten Richtungen (a, b, c, bzw. a_1, b_1, c_1).

Wir bedienen uns also

1. der Richtungskosinus der Normalen, die bestimmt sind durch

$$l + pn = 0, \quad m + qn = 0, \qquad (l^2 + m^2 + n^2 = 1),$$
$$l_1 + p_1 n_1 = 0, \quad m_1 + q_1 n_1 = 0, \qquad (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1),$$

2. der Richtungskosinus u, v, w der Strecke PP_1,
3. der Richtungskosinus

$$(5)\left\{\begin{array}{l} a = mw - nv, \quad b = nu - lw, \quad c = lv - mu, \\ a_1 = n_1 v - m_1 w, \quad b_1 = l_1 w - n_1 u, \quad c_1 = m_1 u - l_1 v \end{array}\right.$$

der zu PP_1 senkrechten, in den Elementen E bzw. E_1 gelegenen Richtungen.

Die Gleichungen B sind dann zu ersetzen durch

$$(1') \qquad x_1 - x = ku, \quad y_1 - y = kv, \quad z_1 - z = kw,$$
$$(2') \qquad ul + vm + wn = 0,$$
$$(3') \qquad ul_1 + vm_1 + wn_1 = 0,$$
$$(4') \qquad ll_1 + mm_1 + nn_1 = \cos\alpha.$$

Zur Ergänzung geben wir gleich noch die folgenden, aus der Verknüpfung der fünf Richtungen unmittelbar ableitbaren Beziehungen an:

$$(6)\left\{\begin{array}{l} m_1 n - n_1 m = u \sin\alpha, \;\; n_1 l - l_1 n = v \sin\alpha, \;\; l_1 m - m_1 l = w \sin\alpha, \\ l_1 - l\cos\alpha = a\sin\alpha, \;\; m_1 - m\cos\alpha = b\sin\alpha, \;\; n_1 - n\cos\alpha = c\sin\alpha, \\ l - l_1\cos\alpha = a_1\sin\alpha, \;\; m - m_1\cos\alpha = b_1\sin\alpha, \;\; n - n_1\cos\alpha = c_1\sin\alpha, \\ a a_1 + b b_1 + c c_1 = -\cos\alpha. \end{array}\right.$$

Diese Tabelle wird gebraucht, um die aus der Differentiation der Gleichungen B sich ergebenden Beziehungen übersichtlich darzustellen.

Da wir später (Nr. III) die Normale des ersten Elements mit der z-Achse, den Punkt P mit dem Koordinatenanfang zusammenfallen lassen, so wollen wir für diesen Fall auch gleich die Tabelle aufstellen:

$$(T)\left\{\begin{array}{l} l = 0, \;\; m = 0, \;\; n = 1, \;\; [p = q = 0], \\ u = \cos\vartheta, \;\; v = \sin\vartheta, \;\; w = 0, \\ a = -\sin\vartheta, \;\; b = \cos\vartheta, \;\; c = 0, \\ l_1 = -\sin\vartheta\sin\alpha, \;\; m_1 = \cos\vartheta\sin\alpha, \;\; n_1 = \cos\alpha, \\ [p_1 = \sin\vartheta \operatorname{tang}\alpha, \;\; q_1 = -\cos\vartheta \operatorname{tang}\alpha], \\ a_1 = \sin\vartheta\cos\alpha, \;\; b_1 = -\cos\vartheta\cos\alpha, \;\; c_1 = \sin\alpha. \end{array}\right.$$

II.

Wir leiten nunmehr die Haupteigenschaft der Bäcklundschen Transformation ab. Man erhält aus (1) durch Differentiation

$$dx(x_1 - x) + dy(y_1 - y) + dz(z_1 - z) = dx_1(x_1 - x) + dy_1(y_1 - y) + dz_1(z_1 - z)$$

oder mit Rücksicht auf (1′) und die Gleichungen

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dz_1 = p_1\,dx_1 + q_1\,dy_1,$$
$$(u + wp)\,dx + (v + wq)\,dy = (u + wp_1)\,dx_1 + (v + wq_1)\,dy_1,$$

und dies vereinfacht sich wegen

$$u + wp = 1/n\,(un - wl) = b/n\,,$$
$$v + wq = 1/n\,(vn - wm) = -\,a/n\,,$$
$$n + wp_1 = 1/n_1\,(u\,n_1 - w\,l_1) = -\,b_1/n_1\,,$$
$$v + wq_1 = 1/n_1\,(v\,n_1 - w m_1) = a_1/n_1$$

zu

$$(1'') \qquad 1/n\,(b\,dx - a\,dy) = 1/n_1\,(-b_1\,dx_1 + a_1\,dy_1)\,.$$

Genau so verfährt man mit (2), (3) und (4), d. h. man spaltet bei der Differenzierung in eine linke Seite, die nur dx, dy, dp und dq enthält, und eine rechte Seite, die nur dx_1, dy_1, dp_1 und dq_1 enthält, und verwendet dann nachträglich, um die Darstellung zu vereinfachen, die in Nr. I eingeführten Richtungen. Man erhält dann

$$(2'') \qquad k\,n\,n_1\,(u\,dp + v\,dq) = \sin\alpha\,(v\,dx_1 - u\,dy_1)\,,$$
$$(3'') \qquad \sin\alpha\,(v\,dx - u\,dy) = k\,n\,n_1\,(u\,dp_1 + v\,dq_1)\,,$$
$$(4'') \qquad n\,(a\,dp + b\,dq) = -\,n_1\,(a_1\,dp_1 + b_1\,dq_1)\,.$$

Um die Transformation zu erweitern, d. h. auf die zweiten partiellen Differentialquotienten von z auszudehnen, bedienen wir uns jetzt neben den durch

$$dp - r\,dx - s\,dy = 0\,,$$
$$dq - s\,dx - t\,dy = 0$$

eingeführten MONGEschen r, s, t mit ENGEL homogener Koordinaten[1], nämlich gewisser zweireihiger Determinanten.

Zur Abkürzung benützen wir dabei allgemein das Symbol

$$(dU, dV) \equiv (dU\,\delta V - dV\,\delta U)$$

und erhalten dann die Tabelle

[1] Vgl. Nr. 15 des oben angeführten Enzyklopädieartikels III D 7.

$$(E)\left\{\begin{array}{lll}(dx,dy) & =\varepsilon & =(1,2),\\ (dx,dp)=(dx,rdx+sdy) & =s\cdot\varepsilon & =(1,3),\\ (dx,dq)=(dx,sdx+tdy) & =t\cdot\varepsilon & =(1,4),\\ (dy,dp)=(dy,rdx+sdy) & =-r\cdot\varepsilon & =(2,3),\\ (dy,dq)=(dy,sdx+tdy) & =-s\cdot\varepsilon & =(2,4),\\ (dp,dq)=(rdx+sdy,sdx+tdy) & =(rt-s^2)\varepsilon & =(3,4),\end{array}\right.$$

der eine entsprechende Tabelle (E_1) an die Seite zu stellen ist. — Danach ist der Weg für die Lösung der Hauptaufgabe vorgeschrieben: Man hat jetzt die linken Seiten und die rechten Seiten der Gleichungen $(1'')$ bis $(4'')$ paarweise zu kombinieren nach Vorbild der Tabellen (E) und (E_1), erhält also z. B. aus $(1'')$ und $(2'')$ links

$$\begin{aligned}&kn_1\big(bu\,(dx,dp)+bv\,(dx,dq)-au\,(dy,dp)-av\,(dy,dq)\big)\\ &=kn_1\big(aur+(av+bu)s+bvt\big)\,\varepsilon\end{aligned}$$

und rechts

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\alpha}{n_1}\big(b_1u-a_1v\big)\big(dx_1,dy_1\big)\\ &=\frac{\sin\alpha}{n_1}\big(-n_1\big)\cdot\varepsilon_1=-\sin\alpha\,\varepsilon_1\end{aligned}$$

oder

$$[1,2]\ldots kn_1\big(aur+(av+bu)s+bvt\big)\cdot\varepsilon=-\sin\alpha\cdot\varepsilon_1,$$

und ebenso der Reihe nach

$$\begin{aligned}&[1,3]\ldots\sin\alpha\cdot\varepsilon=kn\big(a_1ur_1+(a_1v+b_1u)s_1+b_1vt_1\big)\cdot\varepsilon_1,\\ &[1,4]\ldots\big(a^2r+2abs+b^2t\big)\cdot\varepsilon=-\big(a_1^2r_1+2a_1b_1s_1+b_1^2t_1\big)\cdot\varepsilon_1,\\ &[2,3]\ldots\big(u^2r+2uvs+v^2t\big)\cdot\varepsilon=-\big(u^2r_1+2uvs_1+v^2t_1\big)\cdot\varepsilon_1,\\ &[2,4]\ldots kn^3\,(rt-s^2)\cdot\varepsilon=-\sin\alpha\,\big(ua_1r_1+(a_1v+b_1u)s_1+b_1vt_1\big)\cdot\varepsilon_1,\\ &[3,4]\ldots\sin\alpha\,\big(aur+(av+bu)s+bvt\big)\cdot\varepsilon=kn_1^3\big(r_1t_1-s_1^2\big)\cdot\varepsilon_1.\end{aligned}$$

Jetzt kann entschieden werden, welche Flächen (zweidimensionale Flächenelementvereine) wieder in Flächen übergehen.

Dazu ist notwendig und hinreichend, daß diese sechs Gleichungen, in denen man etwa die vier Größen r_1, s_1, t_1 und $\varepsilon:\varepsilon_1$ als Unbekannte wählen kann, miteinander verträglich sind. Die beiden Bedingungen sind infolge des symmetrischen Baues leicht zu finden. Man erhält nämlich aus [1,3] und [2,4] durch Elimination

$$-\sin^2 a = k^2 n^4 (rt - s^2)$$

oder wegen

$$n^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

$$\frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = -\frac{\sin^2 a}{k^2} \tag{7}$$

und ebenso aus [1,2] und [3,4]

$$\frac{r_1 t_1 - s_1^2}{(1+p_1^2+q_1^2)^2} = -\frac{\sin^2 a}{k^2}. \tag{8}$$

Damit ist die Haupteigenschaft der BÄCKLUNDschen Transformation erwiesen, nämlich gezeigt, daß die Flächen konstanter negativer Krümmung

$$K = -\frac{\sin^2 a}{k^2} \tag{9}$$

in gleichartige Flächen übergehen.

Genauer gesagt: Bei der Transformation werden den ∞^2 Elementen einer Fläche $\infty^1 \cdot \infty^2 = \infty^3$ Flächenelemente zugeordnet, die im allgemeinen sich nicht wieder in Vereine von ∞^2 Elementen anordnen lassen. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Ausgangsfläche das konstante negative Krümmungsmaß (9) besitzt. Die ihren Elementen zugeordneten ∞^3 Elemente lassen sich dann in ∞^1 Vereine anordnen, die wieder Flächen von demselben Krümmungsmaß (9) bilden.

Bei der weiteren Untersuchung kann man dann die Gleichungen [2,4] und [3,4] fortlassen, (7) und (8) an ihrer Stelle benützen. Man kann z. B. die Beziehung

$$n^2(dx\,dp + dy\,dq)\,\varepsilon_1 = n_1^2(dx_1\,dp_1 + dy_1\,dq_1)\,\varepsilon$$

ausrechnen, aus der folgt, daß Haupttangentenkurven in Haupttangentenkurven übergehen, usw. Wir wollen aber den damit angedeuteten Weg nicht beschreiten, weil die weiteren Beziehungen auf anderm Wege bequemer gewonnen werden können (vgl. Nr. III). Dagegen wollen wir hier zwei andre Gesichtspunkte erwähnen.

Zunächst sei der Ausartungen ($a=0$ oder $k=0$) gedacht. Die erste Ausartung führt auf die abwickelbaren Flächen (Torsen), die zweite auf die Raumkurven. In beiden Fällen erhält man triviale Transformationen: Bei einer Torse hat man jedes Flächenelement längs des ebenen Streifens, dem es angehört, um eine Strecke k zu verschieben, bei einer Kurve jedes Flächenelement um das in ihm gelegene Linienelement der Kurve als Achse zu drehen. Diese Ausartungen (für $K=0$ und $K=\infty$) begrenzen das Feld der regulären Transformationen.

Sodann darf auf eine noch ungelöste Aufgabe[1] hingewiesen werden. Die Bemühungen, die Transformation dahin zu verallgemeinern, daß man an Stelle von k und a in den Gleichungen (B) keine Konstanten nimmt, sondern veränderliche Größen, die von den Koordinaten des Elements $E(x, y, z, p, q)$ und von der Richtung des Vektors PP_1 (im ganzen daher von *sechs* Parametern) abhängen, versprechen vielleicht Aussicht auf Erfolg, wenn man sich sowohl der Engelschen Elementkoordinaten wie auch der hier benützten, in Nr. I eingeführten fünf Vektoren bedient.

III.

Die Zuordnung *entsprechender Linienelemente* der Flächenelemente E und E_1 kann jetzt leicht weiter verfolgt werden an der Hand der Gleichungen $(1'')$ bis $(4'')$, wenn man, wie dies bereits in der Tabelle (T) geschehen ist, das Koordinatensystem geeignet wählt.

Wir wollen diese Wahl noch dahin ergänzen, daß wir im Koordinatenanfang P die xz-Ebene und die yz-Ebene zum ersten und zweiten Hauptnormalschnitt machen. Die entsprechenden Hauptkrümmungsradien seien dann

$$\frac{k}{\sin a}\, e^{\lambda}, \quad -\frac{k}{\sin a}\, e^{-\lambda} \qquad \left(K = -\frac{\sin^2 a}{k^2}\right)$$

[1] Vgl. die in Nr. 16 des Enzyklopädieartikels III D 7 besprochene Dissertation von O. Rölcke (Greifswald 1907).

und es wird weiter

$$r = \frac{\sin\alpha}{k} e^{-\lambda}, \quad s = 0, \quad t = -\frac{\sin\alpha}{k} e^{\lambda}.$$

Geht man mit den daraus folgenden Werten

$$dp = \frac{\sin\alpha}{k} e^{-\lambda} dx, \quad dq = -\frac{\sin\alpha}{k} e^{\lambda} dy$$

in die Formeln (1″) und (2″) ein und berücksichtigt außerdem die Tabelle (T), so erhält man jetzt

$$(10) \qquad \cos\vartheta\, dx_1 + \sin\vartheta\, dy_1 = \cos\vartheta\, dx + \sin\vartheta\, dy,$$

$$(11) \qquad \sin\vartheta\, dx_1 - \cos\vartheta\, dy_1 = \cos\alpha\left(\cos\vartheta\, e^{-\lambda} dx - \sin\vartheta\, e^{\lambda} dy\right),$$

und endlich

$$dz_1 = p_1 dx_1 + q_1 dy_1 = \operatorname{tang}\alpha\left(\sin\vartheta\, dx_1 - \cos\vartheta\, dy_1\right)$$

oder

$$(12) \qquad dz_1 = \sin\alpha\left(\cos\vartheta\, e^{-\lambda} dx - \sin\vartheta\, e^{\lambda} dy\right).$$

Aus diesen drei Gleichungen sind alle geometrischen Beziehungen leicht abzulesen.

Zunächst berechnen wir noch

$$(13) \quad ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 \cos^2\vartheta\left(1 + e^{-2\lambda}\right) + dy^2 \sin^2\vartheta\left(1 + e^{2\lambda}\right).$$

Da in (13) das Glied $dx\,dy$ nicht auftritt, so folgt, *daß den Richtungen der Krümmungslinien in E* ($dy=0$, $dz=0$, bzw. $\delta x=0$, $\delta z=0$) *in E_1 zwei zueinander senkrechte Richtungen entsprechen.*

Aus dem involutorischen Charakter der Transformation, den die Gleichungen (B) lehren, folgt dann umgekehrt, daß den Richtungen der Krümmungslinien in E_1 auch im Element E zwei zueinander senkrechte Richtungen entsprechen.

Da aber die Abbildung in Hinblick auf (13) nicht konform ist, gibt es nur ein Orthogonalsystem, das wieder in ein Orthogonalsystem übergeht; diese zugeordneten Orthogonalsysteme sind daher die Krümmungslinien. — Wir haben also das Ergebnis:

Bei der BÄCKLUNDschen *Transformation $E \rightarrow E_1$ gehen Krümmungslinien in Krümmungslinien über.*

Wir fragen weiter: Welche Linienelemente ändern ihre Länge nicht, d. h. wie ist $dy:dx$ zu wählen, damit

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= dx^2 \cos^2\vartheta\left(1+e^{-2\lambda}\right) + dy^2 \sin^2\vartheta\left(1+e^{2\lambda}\right) \\ &= ds^2 = dx^2 + dy^2 \end{aligned}$$

wird? — Dies führt auf die Bedingung

$$\begin{aligned} & dx^2\left(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta\, e^{-2\lambda}\right) + dy^2\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\, e^{2\lambda}\right) \\ &= \left(\sin^2\vartheta\, e^{\lambda} - \cos^2\vartheta\, e^{-\lambda}\right)\left(dx^2 e^{-\lambda} - dy^2 e^{\lambda}\right) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$e^{-\lambda} dx^2 - e^{\lambda} dy^2 = \frac{k}{\sin\alpha}\left(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2\right) = 0\,.$$

Diese Gleichung gibt aber die Richtungen der Haupttangentenkurven an.

Es ergibt sich also, daß bei der Abbildung $E \rightarrow E_1$ die Haupttangentenkurven in Kurven derselben Länge übergehen. Ähnlich wie bei den Krümmungslinien schließt man nun weiter: Den Haupttangentenkurven der zugeordneten Fläche entsprechen auf der ersten Fläche Kurven mit demselben Linienelement. Da es aber gerade zwei Kurvenscharen gibt, die ihre Länge nicht ändern, so folgt:

Bei der Transformation $E \rightarrow E_1$ gehen die Haupttangentenkurven in die Haupttangentenkurven über; die Längen einander entsprechender Strecken sind gleich.

Man erhält auch leicht Aufschluß über die *Singularitäten*, die die Transformation hineinbringt, wenn man den Winkel φ_1 der abgebildeten Haupttangentenkurven berechnet. Dieser Winkel wird dann zu Null (oder π), wenn einer der beiden Hauptkrümmungsradien zu Null wird, der andre unbegrenzt wächst, an einer Stelle also, wo eine Rückkehrkante auftritt.

Aus den Richtungen

$$dx : dy : dz = e^{\lambda/2} : e^{-\lambda/2} : 0$$

$$\delta x : \delta y : \delta z = e^{\lambda/2} : -e^{-\lambda/2} : 0$$

der Haupttangentenkurven in E kann man aber mit Verwendung der Formeln (10) bis (12) für φ_1 leicht berechnen:

$$\begin{aligned}\cos\varphi_1 &= \frac{dx_1\,\delta x_1 + dy_1\,\delta y_1 + dz_1\,\delta z_1}{ds_1\,\delta s_1} \\ &= \big[(\cos\vartheta\, dx_1 + \sin\vartheta\, dy_1)(\cos\vartheta\,\delta x_1 + \sin\vartheta\,\delta y_1) \\ &+ (\sin\vartheta\, dx_1 - \cos\vartheta\, dy_1)(\sin\vartheta\,\delta x_1 - \cos\vartheta\,\delta y_1) + dz_1\delta z_1\big] : ds_1\delta s_1 \\ &= \cos 2\vartheta\end{aligned}$$

oder

$$\varphi_1 = 2\vartheta.$$

Eine *Singularität* ($\varphi_1 = 0$ oder $\varphi_1 = \pi$) tritt also auf, wenn PP_1 gerade die Richtung einer Krümmungslinie in E berührt ($\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi/2$). Man könnte solche Singularitäten, die z. B. an der aus der Pseudosphäre abgeleiteten »Komplementärfläche« deutlich hervortreten[1], in gewissem Sinne »unwesentlich« nennen, weil sie durch die BÄCKLUNDsche Transformation hineinkommen und umgekehrt mit ihrer Hilfe wieder beseitigt werden können. Konische Punkte wären dagegen als »wesentliche« Singularitäten zu bezeichnen.

IV.

Konstruktion des zugeordneten Krümmungselements.

Die Gleichungen (10) bis (12) gestatten auch, die Konstruktion des zugeordneten Krümmungselements anzugeben. Dabei mögen jetzt die Bestimmungsstücke des zweiten Elements von denen des ersten durch Akzente (′) unterschieden werden.

[1] Vgl. Fig. 16 auf S. 471 von BIANCHI-(Lukat), Vorlesungen über Differentialgeometrie (Leipzig 1899).

Das erste Element E ist gegeben durch P, dann die Normale mit den auf ihr gelegenen Krümmungsmittelpunkten Z_1 und Z_2 der Hauptnormalschnitte; dabei ist

$$P Z_1 = R_1 = \frac{k}{\sin \alpha} e^{\lambda},$$

$$P Z_2 = R_2 = -\frac{k}{\sin \alpha} e^{-\lambda},$$

und die erste Krümmungslinie ist in P gegeben durch

$$d y = d z = 0 \quad (d x \neq 0),$$

die zweite durch

$$\delta x = \delta z = 0 \quad (\delta y \neq 0).$$

Die Gleichungen (10) bis (12) geben jetzt

$$\begin{aligned}
&\cos \vartheta \, d x_1 + \sin \vartheta \, d y_1 = \cos \vartheta \, d x, \\
&\sin \vartheta \, d x_1 - \cos \vartheta \, d y_1 = \cos \alpha \cos \vartheta \, e^{-\lambda} d x, \\
&d z_1 = \sin \alpha \cos \vartheta \, e^{-\lambda} d x
\end{aligned}$$

und zeigen, wie man die Richtung der zugeordneten Krümmungslinie bestimmen kann.

Man kann nämlich den durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(\xi_1 - x_1) \cos \vartheta + (\eta_1 - y_1) \sin \vartheta = -k, \\
&(\xi_1 - x_1) \sin \vartheta - (\eta_1 - y_1) \cos \vartheta = -k \cos \alpha \, e^{-\lambda}, \\
&\zeta_1 - z_1 = -k \sin \alpha \, e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

gegebenen Punkt $W_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ der Tangente der ersten Krümmungslinie des Elements E' leicht angeben. Setzt man die Werte

$$x_1 = k \cos \vartheta \;, \quad y_1 = k \sin \vartheta \;, \quad z_1 = 0$$

der Koordinaten von P' ein, so erhält man

$$\xi_1 = -k \cos\alpha \sin\vartheta\, e^{-\lambda},$$
$$\eta_1 = +k \cos\alpha \cos\vartheta\, e^{-\lambda},$$
$$\zeta_1 = -k \sin\alpha\, e^{-\lambda}.$$

Außerdem beachte man, daß Z_2 die Koordinaten

$$x = y = 0, \quad z = R_2 = -\frac{k}{\sin\alpha} e^{-\lambda}$$

hat. Hieraus folgt, daß ξ_1, η_1, ζ_1 gerade die Koordinaten des Fußpunktes des von Z_2 aus auf die Ebene

$$\sin\alpha\left(\xi \sin\vartheta - \eta \cos\vartheta\right) - \zeta \cos\alpha = 0$$

des Elements E' gefällten Lotes sind. – Demnach ergibt sich die einfache Konstruktion:

Man fälle von den Krümmungsmittelpunkten Z_1 und Z_2 der Hauptnormalschnitte des ersten Elements aus die Lote $Z_1 W_2$ und $Z_2 W_1$ auf die Ebene des zugeordneten Elements; die Geraden $P' W_1$ und $P' W_2$ bestimmen dann die Richtungen der zugeordneten ersten und zweiten Krümmungslinie in P'.

Man erkennt, daß man außer der gegenseitigen Lage der Elemente E, E' nur die Krümmungsmittelpunkte Z_1 und Z_2 braucht, um die Krümmungslinienrichtungen in P' zu bestimmen.

Will man dann weiter noch die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte Z_1' und Z_2' finden, so hat man die x- und y-Achse, d. h. die Tangenten der Hauptschnitte des ersten Elements mit der zu PP' senkrechten, die Normale von E' enthaltenden Ebene zum Schnitt zu bringen $(W_1'$ und $W_2')$, dann in dieser Ebene auf $P' W_1'$ und $P' W_2'$ die Senkrechten zu errichten und mit der Normale zum Schnitt zu bringen $(Z_2'$ und $Z_1')$. Z_2' und Z_1' sind die gesuchten Krümmungsmittelpunkte.

Hat PP' die Richtung einer Krümmungslinie in P, etwa der x-Achse, so fällt W_1' mit P' zusammen, während W_2' unendlich fern liegt, also wird hier der Krümmungsradius R_2' zu Null, R_1' unendlich groß; es tritt dann eben die zum Schluß von Nr. III besprochene »unwesentliche Singularität« auf.

An einer solchen Stelle versagen die MONGEschen r, s, t, während die ENGELschen sechs homogenen Koordinaten ihre Geltung behalten; es wird nur $(1, 2)$ zu Null, wie die Tabelle in Nr. II zeigt.